A 13-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ PENTRU JUNIORI

25-30 iunie 2009, Bosnia-Herţegovina, Sarajevo

prezentare de MIRCEA FIANU[1)] şi DINU ŞERBĂNESCU[2)]

Competiţia s-a desfăşurat în capitala statului Bosnia-Herţegovina, Sarajevo, în perioada 25-30 iunie 2009. Participarea a fost cea uzuală, constând în cele 11 ţări membre (Albania, Bosnia şi Herţegovina, Bulgaria, Cipru, Grecia, Macedonia, Moldova, Muntenegru, România, Serbia şi Turcia). În afara concursului au participat două ţări cu statut de invitat, Kazahstan şi Tadjikistan, la care s-a adăugat echipa secundă a ţării organizatoare, pentru un total 80 de elevi. Echipa României a fost formată din 6 elevi: *Ştefana Laura Aniţa*, *Mihai Florin Barbu*, *Omer Cerrahoglu*, *Petru Constantinescu*, *Dan Dănăilă*, *Monica Foszto* şi condusă de profesorii *Dinu Şerbănescu* şi *Mircea Fianu*.

Într-un interval de 4 ore şi 30 de minute, elevilor li s-au propus spre rezolvare următoarele 4 probleme.

1. Fie $ABCDE$ un pentagon convex cu proprietatea că $AB + CD = BC + DE$ şi fie k un cerc cu centrul pe latura AE, tangent la laturile AB, BC, CD şi DE în punctele P, Q, R şi respectiv S, puncte diferite de vârfurile pentagonului. Să se arate că dreptele PS şi AE sunt paralele.

2. Să se determine numerele naturale a, b şi c cu proprietatea că:

$$2^a 3^b + 9 = c^2.$$

3. Fie numerele reale x, y, z cu proprietatea că $0 < x, y, z < 1$ şi:

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z).$$

Să se arate că cel puţin unul dintre numerele $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ este mai mare sau egal cu $\frac{1}{4}$.

4. În plan, 2009 puncte distincte se colorează sau cu roşu sau cu albastru, astfel încât orice cerc de rază 1 cu centrul într-un punct colorat albastru să conţină pe circumferinţă exact două puncte colorate roşu. Să se determine numărul maxim de puncte colorate albastru.

Prezentăm soluţiile complete ale problemelor:

1. Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale, deci $BP = BQ$, $CQ = CR$ şi $DR = DS$. Egalitatea $AB + CD = BC + DE$ devine $AP + PB + CR + RD = BQ + QC + DS + SE$, de unde rezultă că $AP = SE$.

[1)] Profesor, Şc. gen. nr. 19, Bucureşti

[2)] Profesor, C.N. „Sf. Sava", Bucureşti

Triunghiurile APO şi SEO sunt congruente, deoarece sunt dreptunghice şi au catetele egale ($OP = OS$ şi $AP = SE$). Rezultă că distanţele de la punctele P şi S la dreapta AE sunt egale, ambele reprezentând lungimile înălţimilor corespunzătoare ipotenuzelor în cele două triunghiuri. Cum P şi S sunt de aceeaşi parte a dreptei AE – din convexitatea pentagonului – deducem că $PS \parallel AE$, ceea ce trebuia arătat.

2. Ecuaţia se scrie $2^a 3^b = (c-3)(c+3)$.

Dacă $b = 0$, obţinem $(a, b, c) = (4,\ 0,\ 5)$.

Dacă $b > 0$ atunci 3 divide c^2, deci 9 divide $c^2 - 9 = 2^a 3^b$, de unde $b \geq 2$. Fie $c = 3y$, y natural; avem:

$$(y-1)(y+1) = 2^a 3^{b-2}.$$

Dacă $a = 0$, obţinem $(a, b, c) = (0,\ 3,\ 6)$.

Dacă $a \geq 1$, atunci $y-1$ şi $y+1$ sunt numere pare, deci $a \geq 2$ şi $\frac{y-1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} = 2^{a-2} 3^{b-2}$. Deoarece numerele $\frac{y-1}{2}$, $\frac{y+1}{2}$ sunt consecutive, ele sunt coprime, deci unul este 2^{a-2}, iar celălalt 3^{b-2}. Fie $m = a-2$, $n = b-2$. Distingem cazurile:

i) $2^m - 3^n = 1$. Dacă $n = 0$, atunci $m = 1$ şi $(a, b, c) = (3,\ 2,\ 9)$.

Dacă $n > 0$, atunci m este par, utilizând resturi modulo 3. Fie $m = 2t$, t natural. Rezultă $(2^t - 1)(2^t + 1) = 3^n$, de unde $t = 1$, $m = 2$, $n = 1$ şi $(a, b, c) = (4,\ 3,\ 21)$.

ii) $3^n - 2^m = 1$. Evident $m > 0$. Dacă $m = 1$, atunci $n = 1$ şi $(a, b, c) = (3,\ 3,\ 15)$.

Dacă $m > 1$, utilizând resturi modulo 4 rezultă că n este par. Fie $n = 2s$, s natural. Obţinem $(3^s - 1)(3^s + 1) = 2^m$, de unde $s = 1$, $n = 2$, $m = 3$ şi $(a, b, c) = (5,\ 4,\ 51)$.

3. Este cunoscut că $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$, inegalitatea fiind echivalentă cu $0 \leq (2a-1)^2$. Atunci:

$$(xyz)^2 = xyz(1-x)(1-y)(1-z) = \prod(x(1-x)) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

deci $xyz \leq \frac{1}{8}$. De aici rezultă că cel puţin unul dintre numerele x, y şi z este mai mic sau egal cu $\frac{1}{2}$; fie de exemplu $x \leq \frac{1}{2}$ şi observăm că $1 - x \geq \frac{1}{2}$.

Presupunem prin absurd că $\frac{1}{4} > \max\{(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x\}$. Din $(1-x)y < \frac{1}{4}$ şi $1 - x \geq \frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{1}{2}y < \frac{1}{4}$, adică $y < \frac{1}{2}$ şi $1 - y > \frac{1}{2}$. Procedând analog găsim $z < \frac{1}{2}$ şi $1 - z > \frac{1}{2}$. Atunci:

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z) > \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

în contradicţie cu $xyz \leq \frac{1}{8}$. Rezolvarea este completă.

Comentarii. 1) Problema admite următoarea interpretare geometrică: ABC este un triunghi echilateral de latură 1, iar AD, BE şi CF sunt trei ceviene concurente în punctul P.

Notând $AF = x$, $BD = y$ şi $CE = z$, condiţia de concurenţă se scrie (cu teorema lui *Ceva*) $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Concluzia este echivalentă cu faptul că unul din triunghiurile AFE, BDF, CDE are aria mai mare sau egală cu $\frac{1}{4}$ din aria triunghiului ABC.

În această formă, soluţia decurge astfel: notând O centrul lui ABC, punctul P se află în interiorul sau pe frontiera unuia dintre triunghiurile ABO, ACO, BCO; fie acesta ACO. Atunci $BD, BF \geq \frac{1}{2}$, q.e.d.

2) Arătăm că restricţia $0 < x, y, z < 1$ nu este necesară. Presupunem prin absurd că $\frac{1}{4} > \max\{(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x\}$. Atunci $a = x+y+z-xy-yz-zx < \frac{3}{4}$. Ipoteza se scrie $xyz = 1-a-xyz$, de unde $xyz = \frac{1}{2}(1-a) > \frac{1}{8}$. Atunci $(xyz)^2 > \frac{1}{64}$, fals – anterior am obţinut $(xyz)^2 \leq \frac{1}{64}$, fără utilizarea restricţiei.

4. Fiecare pereche de puncte roşii apare pe cel mult două cercuri unitate cu centre în puncte albastre. Fie n numărul punctelor roşii. Sunt $\frac{n(n-1)}{2}$ perechi de puncte roşii, deci nu putem avea decât cel mult $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ puncte albastre; în total cel mult $n + n(n-1) = n^2$ puncte. Deoarece $44^2 < 2009$, sunt măcar 45 de puncte roşii, deci cel mult 1964 puncte albastre.

Vom arăta că acest număr poate fi atins. Plasăm 45 puncte pe un segment de lungime strict mai mică decât 2. Acestea vor fi colorate în roşu. Construim toate cercurile de rază 1 cu centrele în aceste puncte; observăm că nu există trei cercuri concurente, deoarece centrele sunt coliniare. Sunt $45 \cdot 44 = 1980$ puncte de intersecţie ale acestor cercuri, iar 1964 vor fi colorate în albastru. Obţinem 2009 puncte ce realizează numărul maxim de puncte albastre.

Echipa noastră a câştigat competiţia cu un total de 208 puncte, obţinând medaliile de aur prin *Dan Dănăilă* (40 de puncte, punctaj maxim) şi *Omer Cerrahoglu* (39 de puncte), şi încă patru medalii de argint prin ceilalţi participanţi. *Omer Cerrahoglu* obţine a doua medalie de aur la această competiţie, după cea din 2008 din Albania. Concursul a fost foarte disputat, în urma echipei noastre s-au clasat Bulgaria (cu 207 puncte) şi Turcia (cu 203 puncte). Să sperăm că elevii români vor obţine rezultate notabile şi în continuare.